Introduction

Les futurs élèves de MPSI se demandent souvent comment ils peuvent se préparer pour leur première année de CPGE. Ce document est conçu pour leur venir en aide, il se présente sous la forme de rappels et d'exercices. Les rappels de terminale doivent être <u>parfaitement</u> *maîtrisés au démarrage de l'année scolaire, afin que l'élève puisse tirer le meilleur parti du cours et des connaissances nouvelles qu'il va aborder. Les exercices permettront de contrôler cette maîtrise.*

Il est donc nécessaire de faire ce travail avant septembre, l'idéal se situant au plus tard dans les quinze derniers jours du mois d'août. Une estimation grossière du temps que vous devrez consacrer à ces exercices donne une valeur minimale de l'ordre d'une vingtaine d'heures.

Une remarque s'impose quand à la faisabilité des exercices proposés : ils sont de difficulté variable, certains sont très faciles et d'autres plus difficiles, voire semblent impossibles. **En aucun cas vous ne devez vous inquiéter si vous ne réussissez pas à faire un exercice !** *Dites-vous plutôt que sécher fait partie de l'activité mathématique, même si jusqu'ici vous n'aviez pas été beaucoup confrontés à ce genre de situation. Passer beaucoup de temps sur un exercice, sans trouver, est en réalité extrêmement utile : c'est ainsi qu'on progresse, et qu'on finit par comprendre réellement une solution. Au contraire de cela, lire un corrigé sans avoir vraiment cherché un exercice est rarement productif, même si ce corrigé est excellent.*

Vous pouvez me contacter cet été par e-mail, à l'adresse `denis.leger@ac-poitiers.fr`*, je ne répondrai pas forcément immédiatement mais vous aurez une réponse dès que possible.*

I- Calculs algébriques dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1°- *Identités remarquables*

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ $\qquad$ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \text{ si } a \neq 1$$

$z\cdot\overline{z} = |z|^2 = a^2+b^2$ si $z=a+ib$ $\qquad$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

2°- *Exercices*

a) *Factorisation*

Factoriser les expressions suivantes :

1. x^2-y^4 $\quad$ **2.** $a^2-b^2+3a-3b$ $\quad$ **3.** $(u-v)^3+2uv(u^2-v^2)$

4. $(2x-1)^2+4x-2$ $\quad$ **5.** $a^4-b^4+a^3-b^3$ $\quad$ **6.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-3x+3y$

b) *Simplifications*

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin^2(x)+2\cos^2(x)-1$ $\quad$ **2.** $\sin^2(x)-\sin^4(x)$

3. $(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2$ $\quad$ **4.** $\sin^4(x)+2\sin^2(x)\cos^2(x)+\cos^4(x)$

5. $e^7\times e^{-3}\times e$ $\quad$ **6.** $e^{3x+1}\times\left(e^{x+2}\right)^2$

7. $\sqrt{e}\times 2e^{\frac{3x+1}{2}}\times e^{\frac{x}{2}+1}$ $\quad$ **8.** $(e^x)^{-2}\times e^{2x+3}$

9. $\ln(2)-3\ln(3)+\ln(8)$ $\quad$ **10.** $5\ln(3)+\dfrac{1}{2}\ln(2)$

11. $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ $\quad$ **12.** $6\ln\left(\sqrt{2}\right)-\ln\left(\dfrac{2^3}{3}\right)$

13. $\cos(x+2\pi)+\cos(x+\pi)+\cos(\pi-x)+\cos(2\pi-x)$

14. $\sin(x+\pi)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi-x)$

c) *Équations réelles*

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln^2(x) - 3\ln(x) = 4$

2. $\ln(2x+1) + \ln(2x-1) = \ln(x+2)$

3. $2\ln(\sqrt{x}) + \ln(1-x) = 2\ln(x)$

4. $e^x - 3 + e^{-x} = 1$

5. $6e^{5x} - 7e^{4x} + e^{3x} = 0$

6. $e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0$

d) *Calculs complexes 1*

Écrire sous forme algébrique $a + ib$ les complexes suivants :

1. $\dfrac{2i-1}{1+i}$

2. $\dfrac{1-2i}{2-i}$

3. $\dfrac{(1+i)^2}{2-4i}$

4. $\left(\dfrac{3+2i}{1-i}\right)^2$

5. $\dfrac{(2+i)(3-i)}{(1+2i)(3+i)}$

6. $(1+i)\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

e) *Calculs complexes 2*

Donner les solutions complexes des équations suivantes :

1. $z^2 + 4z + 4 = 0$

2. $3z^2 + 2z + 1 = 0$

3. $z^2 + 3z + 2 = 0$

4. $z^2 = i$

5. $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

6. $|z - i| = |z + i|$

II- Dérivées et primitives

1°- *Formules de dérivation*

u et v désignent deux fonctions.

1. $(u+v)' = u' + v'$

2. $(\lambda u)' = \lambda u'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

6. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

7. $(u^p)' = p\,u^{p-1}u'$ pour tout réel p (même si $p < 0$, même si p n'est pas entier)

8. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

9. $(e^u)' = u'e^u$

2°- *Exercices de dérivation*

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

2. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-3}$

4. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

5. $f(x) = \ln(e^x - 1)$

6. $f(x) = \sqrt{e^{2x}+1}$

7. $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+4}$

8. $f(x) = \dfrac{2e^x+3}{3e^x+4}$

9. $f(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{3\ln x + 4}$

10. $f(x) = \sin x + 2\cos(3x)$

11. $f(x) = 2\sin x\cos(3x)$

12. $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

3°- *Exercice de calcul de primitives*

Donner des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

2. $f(x) = \dfrac{2}{x} + e^{3x}$

3. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

6. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+2}$

7. $f(x) = \dfrac{2}{3x-4}$

8. $f(x) = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

9. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

4°- *Étude de fonction*

a) *Étude simple*

Étudier (c'est-à-dire faire tous les raisonnements et calculs nécessaire pour finir par tracer la courbe) les fonctions définies par :

1. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ **2.** $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) *Étude plus complète*

i) *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

• Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

• Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une est située dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On le notera par la suite α.

• Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

ii) *Étude de la position relative de deux courbes*

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

• Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0, 1)$ et admettent en ce point la même tangente.

• Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction étudiée ci-dessus.

• À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

• En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

iii) *Calcul d'aire*

• Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (-2x - 3)e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

• En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.

• Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

III- Une suite de fonctions

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal.
Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont données en annexe.

1°- *Étude de la fonction f_1*

a) Vérifier que pour tout réel x, on a $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

b) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

c) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que pour tout réel x, on a $0 < f_1(x) < 4$.

e) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$.

f) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point I_1. Tracer la droite (T_1).

g) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$, en déduire la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[O, \ln 7]$.

2°- *Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.*

a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse. On note I_n ce point d'intersection.

c) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n. Tracer les droites (T_2) et (T_3).

d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la suite (u_n) est constante.

IV- Démonstration par récurrence

1°- *Récurrence simple*

a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, le nombre $n^3 - n$ est multiple de 3.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2°- *Récurrence plus compliquée*

a) On pose $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout entier naturel n. Montrer par récurrence que $u_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n.

b) On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} + \frac{1}{n+1}(u_0u_n + u_1u_{n-1} + u_2u_{n-2} + \cdots + u_{n-2}u_2 + u_{n-1}u_1 + u_nu_0) = 0.$$

Montrer par récurrence que $u_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n.

c) Montrer par récurrence que, pour $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ entiers naturels, on a $a + b \leqslant ab$.

V- Quelques problêmes (un peu) ouverts

1°- *Les deux astronautes*

Alice et Mauricette viennent de s'offrir un astronef flambant neuf, et décident de l'étrenner en allant visiter la planète Éclair. Le voyage dure onze jours, et les règles de pilotage qu'elles se sont fixées sont strictes : elles pilotent à tour de rôle, chacune gardant les commandes un nombre entier de jours compris entre un et le double du nombre de jours de la durée de pilotage précédente (de l'autre pilote). Celle qui pilotera au moment de l'arrivée sur Éclair aura le droit de fouler le sol la première, ce que chacune des deux désire ardemment. Alice prend le premier tour de pilotage, qui peut durer, à son choix, un ou deux jours. Qui posera la première le pied sur la planète Éclair ?

2°- *Le juste prix*

Le père Noël décident d'acheter des consoles de jeu de dernière génération pour les offrir aux enfants. Au moment de partir du magasin, le vendeur lui fait remarquer qu'il devraient acheter également des logiciels de jeu pour aller avec les consoles, chaque logiciel coûtant 200 euros. Le père Noël lui répond que, son budget n'étant pas extensible, s'il offre deux logiciels avec chaque console, il va priver 80 enfants de console. Mais le vendeur rétorque qu'en offrant un seul logiciel avec chaque console, il n'en privera que 50. Quel est donc le prix d'une console ?

3°- *Les identités secrètes*

Albert, Bruno et Christophe portent chacun un nom de famille parmi : Deschamps, Deshaies et Delaforêt. Ils sont tous les trois étudiants, mais dans des matières différentes : il y a un étudiant en informatique, un en médecine et un en mathématiques. On sait les choses suivantes :

• Deschamps a prêté à Albert un de ses livres de médecine.

• Bruno ne s'intéresse pas aux mathématiques, tout comme Delaforêt.

• L'étudiant en médecine et Deshaies sont plus âgés que Christophe.

Quel est le nom complet et la spécialité de chacun des trois étudiants ?

4°- *L'héritage*

Trois frères ont hérité de la cave de leur oncle :

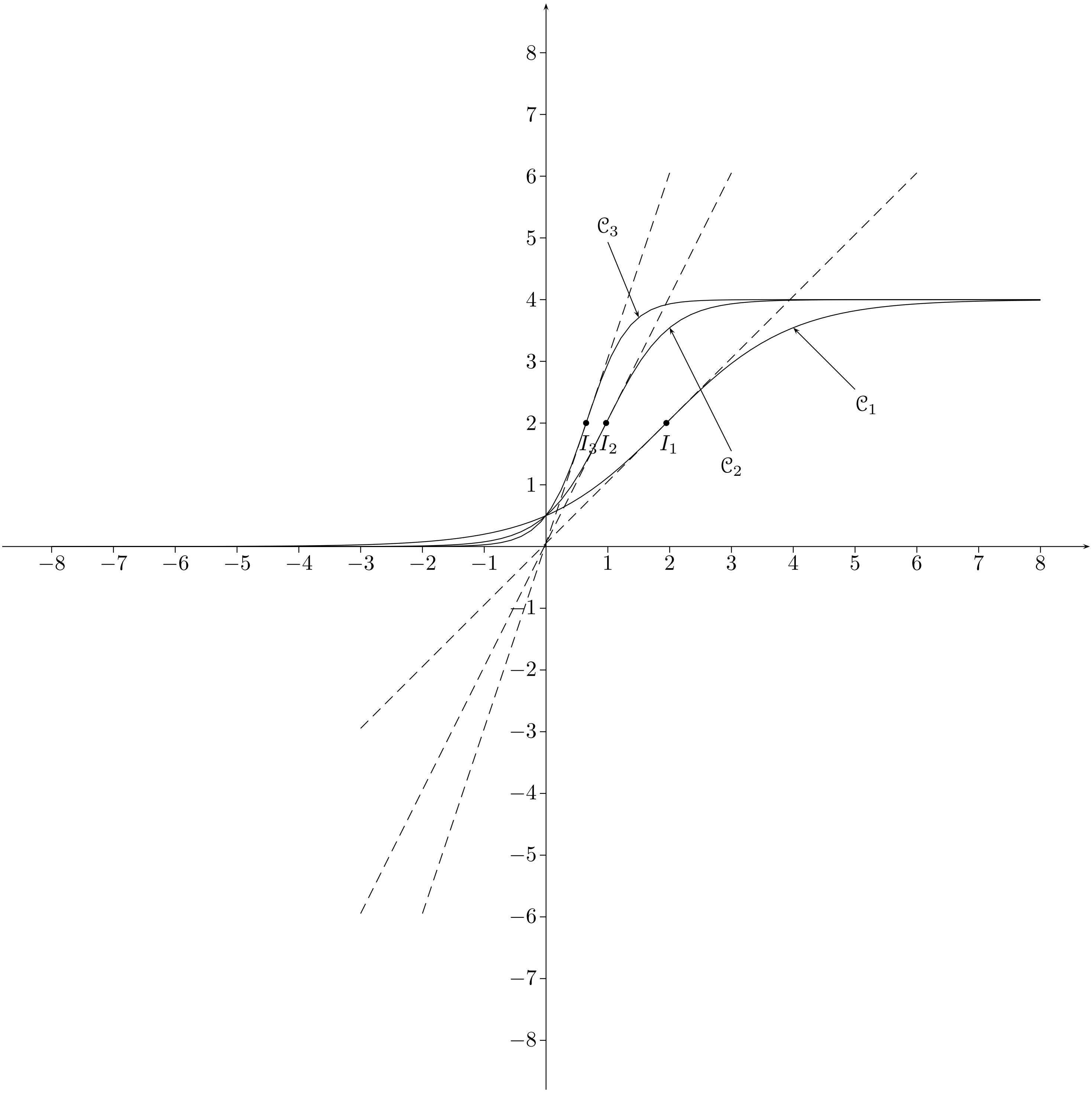
• le premier a eu droit à 5/12 des bouteilles

• le second a eu 30% des bouteilles

• le dernier a eu les 187 bouteilles restantes.

Combien y avait-il de bouteilles dans la cave ?

VI- Annexe



8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_2$
$\mathcal{C}_1$
I_3
I_2
I_1