CONTENU DU LIVRET

Avertissement : Ce livret représente une synthèse des notions fondamentales qui permettent d'aborder la Spécialité Mathématique de Terminale ou l'option Mathématiques Complémentaires* dans les meilleures conditions.

Chaque Thème contient

- une fiche synthèse des connaissances du cours de 1ère Spécialité Maths;
- une sélection d'exercices type qu'il conviendrait de savoir traiter en autonomie;
- une correction de ces exercices.

*** Option Maths Complémentaires :** (arrêtés du 19-7-2019 publiés au Bulletin Officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019.)

> L'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires est destiné prioritairement aux élèves qui, ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en classe de première et ne souhaitant pas poursuivre cet enseignement en classe terminale, ont cependant besoin de compléter leurs connaissances et compétences mathématiques par un enseignement adapté à leur poursuite d'études dans l'enseignement supérieur, en particulier en médecine, économie ou sciences sociales.
>
> Le programme de mathématiques complémentaires s'appuie sur le programme de spécialité de mathématiques de la classe de première qu'il réinvestit et enrichit de nouvelles connaissances et compétences mathématiques, elles-mêmes reliées à des thèmes d'étude où les notions sont mises en situation dans divers champs disciplinaires.

Extrait du programme officiel de l'option Mathématiques complémentaires de Terminale

L'option Mathématiques complémentaires ne fait pas appel aux Thèmes 6 et 8.

Thème n° 1 : Le second degré :
Etude de $A(x) = ax^2 + bx + c$.

Définition :

une fonction polynôme de degré 2 (appelée trinôme) est une fonction définie sur R par $A(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Les nombres a, b et c s'appellent les coefficients de la fonction polynôme.

Forme canonique

$A(x)= a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

Pour quoi faire ?

-Pour trouver les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ du minimum (si a>0) ou du maximum (si a<0) atteint par la fonction.

- Pour dresser le tableau de variation :

	Si a>0		
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$A(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

	Si a<0		
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$A(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$ alors :

$A(x) = 0$ n'a pas de solution

$A(x)$ ne se factorise pas.

$A(x)$ est toujours du signe de a.

Si $\Delta = 0$ alors :

$A(x)$= 0 a une solution $\alpha = \frac{-b}{2a}$

$A(x)$ se factorise en $a(x-\alpha)^2$

$A(x)$ est toujours du signe de a

Si $\Delta > 0$ alors :

$A(x)$ = 0 a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$A(x)$ se factorise en $a(x-x_1)(x-x_2)$

$A(x)$ est du signe de a en dehors des racines x_1 et x_2

Pour quoi faire ?

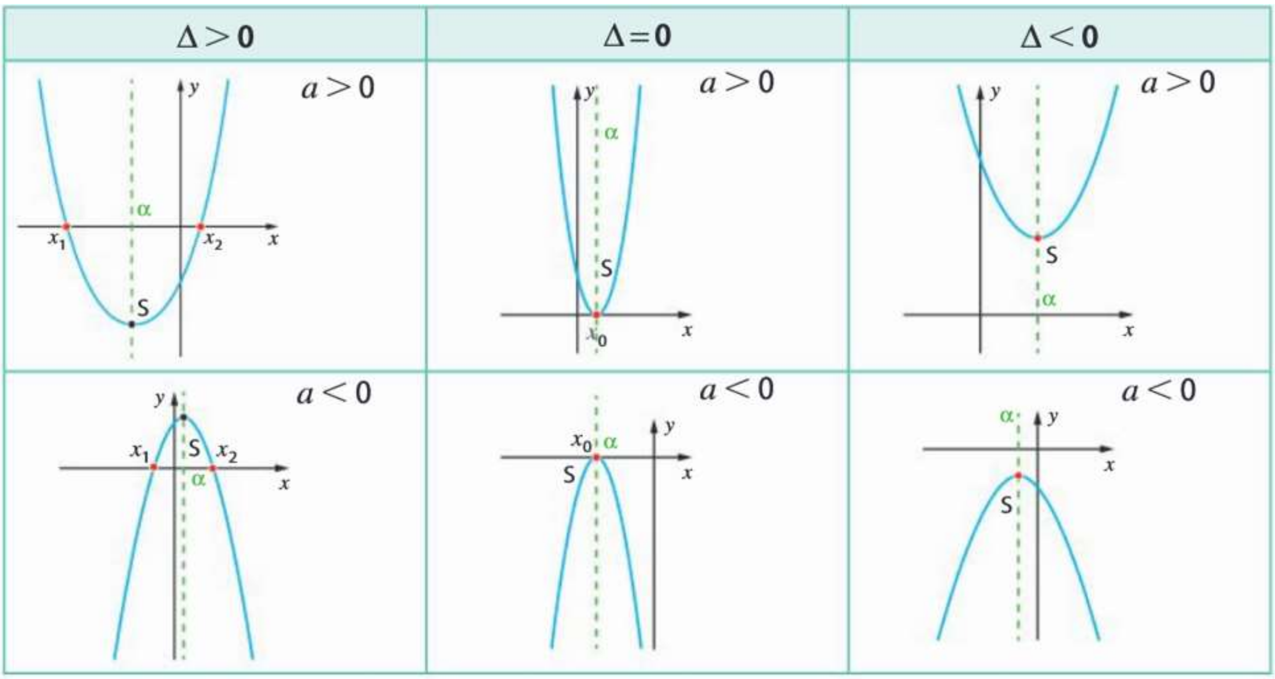
- Résoudre des équations, des inéquations.
- Dresser des tableaux de signe.
- Factoriser.

Propriété :

Lorsque $\Delta > 0$, les racines du polynôme x_1 et x_2 vérifient :

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Interprétation graphique :



Fiche d’exercices : thème n°1 : second degré

Exercice n°1 :

Déterminer la forme canonique du trinôme

$f(x) = -x^2 + 2x - 5$

Exercice n°2 :

Dresser le tableau de variations sur R de la fonction f définie par $f(x) = -3(x+2)^2 + 3$

Exercice n°3 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $0{,}3x^2 - 3x + 7{,}5 = 0$

Exercice n°4 :

Déterminer les racines éventuelles et en déduire, si possible, une forme factorisée des trinômes suivants.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$

b) $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$

c) $h(x) = 18x^2 - 12x + 2$

Exercice n°5 : sans calculatrice

Soit le trinôme $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$.

Déterminer une racine « évidente » de $f(x)$ et en déduire la deuxième racine.

Exercice n°6 :

Dresser les tableaux de signes des fonctions f et g sur R.

a) $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$.

$b)$ $g(x) = 2x^2 - 4x + 2{,}4$.

Exercice n°7 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-2x^2 + 5x - 4 \leq 0$

$b)$ $-2x^2 + 5x + 3 > 0$

Exercice n°8 :

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 6x - 7$

1) Déterminer les formes factorisée et canonique de $f(x)$.

2) Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre :

a) $f(x) = -7$.

b) $f(x) = -16$.

c) $f(x) \geq 0$.

Exercice n°9 :

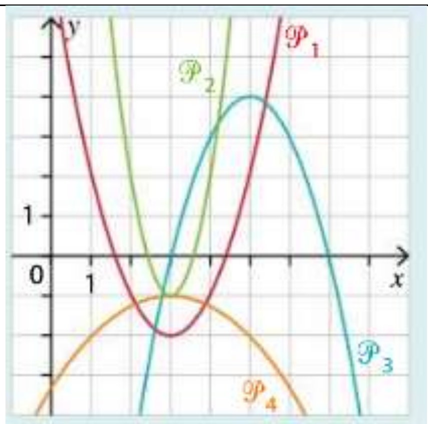
Associer chaque polynôme ci-dessous à la parabole qui le représente.

a) $f(x) = 3(x-3)^2 - 1$

b) $g(x) = -0{,}25(x-3)^2 - 1$

c) $h(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $i(x) = (x-3)(-x+7)$



Corrigé de la fiche d’exercices : thème n°1 : second degré.

Corrigé n°1 :

$a = -1$; $b = 2$ et $c = -5$.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

$$\beta = f(\alpha) = f(1) = -4.$$

Donc $f(x) = -1(x-1)^2 - 4$.

Corrigé 2 :

$a = -3$

$\alpha = -2$ et $\beta = 3$.

Donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

Corrigé 3 :

a) $\Delta = 5 > 0$.

Donc $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b) $\Delta = -3 < 0$.

Pas de solution.

c) $\Delta = 0$

Donc $x_0 = -\frac{-3}{0,6} = 5$.

Corrigé 4 :

a) $\Delta = -20$. Donc f n'est pas factorisable.

b) $\Delta = 49$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$.

Donc $g(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$.

c) $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{1}{3}$.

Donc $h(x) = 18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$.

Corrigé 5 :

$x_1 = 1$ est une solution évidente de $f(x) = 0$, car $5 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = 0$.

On sait que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5}$.

Donc $x_2 = -\frac{1}{5}$

Corrigé 6 :

a) $\Delta = 49$

$x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{3}$

Comme $a < 0$ on obtient :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $\Delta = -3{,}2 < 0$.

Comme $a > 0$ on obtient :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

Corrigé 7 :

a) $\Delta = -7 < 0$.

$Donc\ -2x^2 + 5x - 4$ est toujours du signe de $a = -2$.

L'ensemble solution est $S = R$.

b) $\Delta = 49$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$.

Donc $-2x^2 + 5x + 3$ est du signe de a ($a = -2$) en dehors des racines.

Donc $S = \left]-\frac{1}{2}; 3\right[$.

Corrigé 8 :

1) $\Delta = 64$, donc $x_1 = 7$ et $x_2 = -1$.

$f(x) = (x+1)(x-7)$.

$\alpha = 3$ et $\beta = -16$.

Donc $f(x) = (x-3)^2 - 16$.

2) a) $f(x) = -7$.

On utilise la forme développée :

$x^2 - 6x - 7 = -7$.

Donc $x^2 - 6x = 0$

Soit $x(x-6) = 0$.

D'où $x = 0$ ou $x = 6$.

b) $f(x) = -16$.

On utilise la forme canonique :

$(x-3)^2 - 16 = -16$.

Donc $(x-3)^2 = 0$.

D'où $x = 3$.

c) $f(x) \geq 0$.

On utilise la forme factorisée :

$(x+1)(x-7) \geq 0$.

Donc $S =]-\infty\,; -1] \cup [7; +\infty[$.

Corrigé 9 :

f est représentée par P_2.

g est représentée par P_4.

h est représentée par P_1.

i est représentée par P_3.

A. Notion de suite numérique

Définition :
Une suite u est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

L'image du nombre entier naturel n par la suite u, notée $u(n)$ ou u_n, est appelée terme d'indice n ou de rang n de la suite.

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 1$.
  On dit que cette suite est définie par une **formule explicite**.
- Soit (v_n) est la suite définie par $v_0 = 10$ et pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1$.
  On dit que cette suite est définie par une **relation de récurrence**.

B. Sens de variation

Définition :
(u_n) est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

• Dire que la suite (u_n) est **croissante** à partir d'un indice p signifie que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

• Dire que la suite (u_n) est **décroissante** à partir d'un indice p signifie que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

• Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Plusieurs méthodes :

- Si $u_n = f(n)$ alors on peut étudier le sens de variation de la fonction f pour en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
- Sinon on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- On peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 ... mais il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

C. Suites arithmétiques

Définition :
Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre réel r tel que pour tout nombre entier naturel n,
$$u_{n+1} = u_n + r$$
Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite (u_n).

Remarque :
Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

Propriété :
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous nombres entiers naturels n et p,
$$u_n = u_p + (n-p)r$$
En particulier, pour tout nombre entier naturel n, $\quad u_n = u_0 + nr$.

Propriété :
Pour tout nombre entier naturel n non nul, $\quad 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

D. Suites géométriques

Définition :
Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre réel q tel que pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

Remarque : Une suite est géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant **en multipliant toujours par un même nombre q (non nul).**

Propriété :
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous nombres entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout nombre entier naturel n, $\quad u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété :
Si $q \neq 1$ alors pour tout nombre entier naturel n, $\quad 1 + q + q^2 ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercices sur les suites

Exercice 1 ★

Pour chacune des suites définies pour tout entier naturel n, calculer les termes u_1, u_2 et u_3.

a) $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3 \end{cases}$

Exercice 2 ★★

On définit sur $\mathbb{N}$ les suites suivantes :

a) $u_n = 2n + 3$ b) $v_n = (n+1)(n+3)$ c) $w_n = 3 \times 2^n$ d) $a_n = \dfrac{3}{5^n}$

1. Pour chacune de ces suites, calculer les 3 premiers termes.
2. Déterminer la nature de chacune de ces suites. Justifier.

Exercice 3 ★★

On donne le programme suivant :

```python
def suite(n):
  u=5
  for i in range(n):
    u=u+2
  print(u)
```

a) Quelle est la valeur affichée en sortie par ce programme avec $n = 3$?

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

c) Modifier ce programme afin de calculer le terme u_n de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 2.

Exercice 4 ★

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et telle que $u_{12} = 3$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_{22} = 18$.
3. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$.

Exercice 5 ★

Pour chacune des suites suivantes, calculer v_{20}.

1. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 5$ et telle que $v_{16} = 3$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et telle que $v_{22} = 36$.
3. La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$.

Exercice 6 ★★

On place un capital $C_0 = 6\,000$ € à 2 % par an avec intérêts composés. Cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital, et que, l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.

On note C_n le capital obtenu (ou « valeur acquise ») au bout de n années.

1. Calculer C_1 puis C_2.
2. Donner pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
3. En déduire une expression de C_n en fonction de n. Déterminer une valeur approchée de C_{20}.

Exercice 7 ★★★

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 4$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n + 2$.
   a) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
   b) En déduire que la suite (a_n) est géométrique. Donner sa raison et calculer a_0.
3. Exprimer a_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.(Vérifier les valeurs de u_0, u_1 et u_2.)

Exercice 8 ★

Calculer et arrondir au millième :

a) $S = 1 + 4 + 16 + \cdots + 262\,144$ b) $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{729}$

Exercice 9 ★★★

Un site de jeu vidéo en ligne possédait, en 2020, 500 000 abonnés dans le monde. Un administrateur du site remarque que chaque année, 20 000 nouvelles personnes s'abonnent tandis que 10 % ne se réabonnent pas.

On note, pour tout nombre entier naturel n, u_n le nombre d'abonnés en milliers en $(2020+n)$.
Ainsi $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On note, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 200$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) et interpréter le résultat obtenu.
5. Étudier la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat obtenu sur le nombre d'abonnés à long terme.

Correction - Suites

Exercice 1 ★

a) En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$u_1 = u_0 - 3 = 7 - 3 = 4 \qquad u_2 = u_1 - 3 = 4 - 3 = 1 \qquad u_3 = u_2 - 3 = 1 - 3 = -2$$

b) De la même façon, on trouve $u_1 = 12$, $u_2 = 36$ et $u_3 = 108$.

c) On obtient : $u_1 = 5$, $u_2 = 17$ et $u_3 = 65$.

d) En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$u_1 = u_0 + 0 + 3 = -1 + 3 = 2 \qquad u_2 = u_1 + 1 + 3 = 2 + 4 = 6 \qquad u_3 = u_2 + 2 + 3 = 6 + 5 = 11$$

Exercice 2 ★★

a) $$u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3 \qquad u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \qquad u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = 2$. La suite (u_n) semble arithmétique de raison 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+3) - (2n+3) \\ &= \cancel{2n} + 2 + \cancel{3} - \cancel{2n} - \cancel{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a bien, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = u_n + 2$.
La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 2.

b) $$v_0 = (0+1) \times (0+3) = 3 \qquad v_1 = (1+1) \times (1+3) = 8 \qquad v_2 = (2+1) \times (2+3) = 15$$

On a $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1 = 2$ et $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$. La suite (v_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

c) $$w_0 = 3 \times 2^0 = 3 \qquad w_1 = 3 \times 2^1 = 6 \qquad w_2 = 3 \times 2^2 = 12$$

$\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{w_2}{w_1} = 2$. La suite (w_n) semble géométrique de raison 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et :
$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{\cancel{3} \times 2^{n+1}}{\cancel{3} \times 2^n} \\ &= 2^{n+1-n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a bien, pour tout entier naturel n, $\quad w_{n+1} = 2w_n$.
La suite (w_n) est donc géométrique de raison 2.

d) $$a_0 = \frac{3}{5^0} = 3 \qquad a_1 = \frac{3}{5^1} = \frac{3}{5} \qquad a_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$$

$\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{5}$. La suite (a_n) semble géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} \\ &= \frac{\cancel{3}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{\cancel{3}} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

On a bien, pour tout entier naturel n, $\quad a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$.

La suite (a_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Exercice 3 ★★

a) La variable u contient au départ la valeur 5 puis on « tourne » 3 fois dans la boucle. La variable u prend successivement les valeurs 7 ; 9 et 11. À la sortie, le programme affiche la valeur de la variable u qui est donc 11.

b) Ce programme calcule le terme de rang n de la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.

c)
```python
def suite(n):
  u=7
  for i in range(n):
    u=u*2
  print(u)
```

Exercice 4 ★

1. D'après la propriété du cours : $$\begin{aligned}u_{20} &= u_{12} + (20-12) \times r \\ &= 3 + 8 \times 5 \\ &= 43\end{aligned}$$

2. D'après la propriété du cours : $$\begin{aligned}u_{20} &= u_{22} + (20-22) \times r \\ &= 18 - 2 \times 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

3. (u_n) est arithmétique de raison 7.
   D'après la propriété du cours, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
   $$\begin{aligned}u_{20} &= u_0 + 20 \times r \\ &= 2 + 20 \times 7 \\ &= 142\end{aligned}$$

Exercice 5 ★

1. D'après la propriété du cours : $$\begin{aligned}v_{20} &= v_{16} \times q^{20-16} \\ &= 3 \times 5^4 \\ &= 1\,875\end{aligned}$$

2. D'après la propriété du cours : $$\begin{aligned}v_{20} &= v_{22} \times q^{20-22} \\ &= 36 \times 3^{-2} \\ &= 4\end{aligned}$$

3. (u_n) est géométrique de raison 2.
D'après la propriété du cours, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

$$\begin{aligned} v_{20} &= v_0 \times q^{20} \\ &= 3 \times 2^{20} \\ &= 3\,145\,728 \end{aligned}$$

Exercice 6 ★★

1. On a :

$$\begin{aligned} C_1 &= 6\,000 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \\ &= 6\,000 \times 1,02 \\ &= 6\,120 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C_2 &= 6\,120 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \\ &= 6\,120 \times 1,02 \\ &= 6\,242{,}4 \end{aligned}$$

2. Le capital obtenu augmente de 2 % par an.
On a donc :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \\ &= C_n \times 1,02 \end{aligned}$$

3. La suite (C_n) est donc géométrique de raison 1,02. D'après la propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_0 \times 1,02^n$ ou encore $C_n = 6\,000 \times 1,02^n$.

Exercice 7 ★★★

1.

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 + 4 \\ &= 3 \times 5 + 4 \\ &= 19 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 3u_1 + 4 \\ &= 3 \times 19 + 4 \\ &= 61 \end{aligned}$$

2. a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 3u_n + 4 + 2 \\ &= 3u_n + 6 \\ &= 3(u_n + 2) \\ &= 3a_n \end{aligned}$$

b) On en déduit que la suite (a_n) est géométrique de raison 3.

De plus,

$$\begin{aligned} a_0 &= u_0 + 2 \\ &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

3. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 7 \times 3^n$. Or, on a aussi $u_n = a_n - 2$.

Par conséquent : $$u_n = 7 \times 2^n - 2$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} u_0 &= 7 \times 3^0 - 2 \\ &= 7 - 2 \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 7 \times 3^1 - 2 \\ &= 21 - 2 \\ &= 19 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 7 \times 3^2 - 2 \\ &= 63 - 2 \\ &= 61 \end{aligned}$$

Exercice 8 ★

a)
$$\begin{aligned} S &= 1+4+16+\dots+262\,144 \\ &= 1+4+4^2+\dots+4^9 \\ &= \frac{1-4^{10}}{1-4} \approx 349\,525 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} S &= 9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{729} \\ &= 9\times 1+9\times\frac{1}{3}+9\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots+9\times\left(\frac{1}{3}\right)^8 \\ &= 9\times\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{3}\right)^8\right) \\ &= 9\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^9}{1-\frac{1}{3}} = 9\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^9}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{27}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^9\right) \approx 13{,}5 \end{aligned}$$

Exercice 9 ★★★

1. On a :
$$\begin{aligned} u_1 &= 500\times\left(1-\frac{10}{100}\right)+20 \\ &= 500\times 0,9+20 \\ &= 470 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 470\times\left(1-\frac{10}{100}\right)+20 \\ &= 470\times 0,9+20 \\ &= 443 \end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=0,9u_n+20$

3. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-200 \\ &= 0,9u_n+20-200 \\ &= 0,9u_n-180 \\ &= 0,9(u_n-20) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

   b) La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

   De plus,
$$\begin{aligned} v_0 &= u_0-200 \\ &= 500-200 \\ &= 300 \end{aligned}$$

   On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=300\times 0,9^n$.Or on a aussi $u_n=v_n+200$.

   On a donc :
$$u_n=300\times 0,9^n+200$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \left(300\times 0,9^{n+1}+200\right)-(300\times 0,9^n+200) \\ &= 300\times 0,9^{n+1}+\cancel{200}-300\times 0,9^n-\cancel{200} \\ &= 300\times 0,9^n\times 0,9-300\times 0,9^n\times 1 \\ &= 300\times 0,9^n(0,9-1) \\ &= 300\times 0,9^n(-0,1) \\ &= -30\times 0,9^n<0 \end{aligned}$$

   La suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

5. Lorsque n devient très grand, $0,9^n$ devient très proche de 0 et donc $300\times 0,9^n$ devient lui aussi très proche de 0.

   Par conséquent la limite de la suite (u_n) est 200.

   On en déduit que, selon cette modélisation, sur le long terme, le nombre d'abonnés se stabilisera à 200 000.

1. **Nombre dérivé.Tangente**

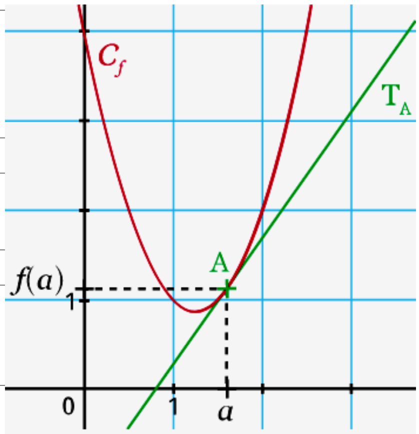
Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I et a et a + h sont deux réels de I avec $h \neq 0$.
On appelle taux d'accroissement (ou de variation) de f entre a et a + h le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. On le note τ(h)

Définition On dit que f est **dérivable en a** lorsque τ(h) tend vers un nombre réel quand h prend des valeurs proches de 0. Ce réel est appelé nombre dérivé de f en a et est noté f′(a). On écrit alors
$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Définition Lorsque f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a; f(a))$ dont le **coefficient directeur est le nombre dérivé *f'(a)*.**

Propriété. Soit f une fonction dérivable en a.
L'équation réduite de la tangente T_A à la courbe de f au point d'abscisse a est :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$



2. **Fonction dérivée.**

Définition : *f* est une fonction définie sur un intervalle I (ou une réunion d'intervalles).
Lorsque *f* est dérivable en tout point de I, on dit que *f* est dérivable sur I.
Alors la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de *f*. On la note : f'

Tableau des dérivées des fonctions usuelles.

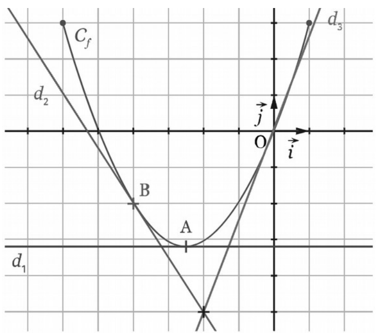
Fonctions	*Fonction* f	*Fonction dérivée* f'	f *Dérivable sur*
Constante	$f(x)=k$ *où k est réel*	$f'(x)=0$	ℝ
Affine	$f(x)=ax+b$ *Avec a et b réels*	$f'(x)=a$	ℝ
Carré	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	ℝ
Puissance	$f(x)=x^n$ *Avec n entier*	$f'(x)=nx^{n-1}$	L'ensemble de définition de f
Inverse	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	ℝ*
Racine carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
Exponentielle	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	ℝ

Opérations sur les fonctions dérivées.

Fonctions u ***et*** v ***sont deux fonctions***	***Dérivées***	Domaine de dérivabilité
$k \times u$ ***avec k réel***	$k \times u'$	Domaine de dérivabilité de u
$u+v$	$u'+v'$	Domaine de dérivabilité de u et v
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$	Domaine de dérivabilité de u et v
Cas particulier du précédent : u^2	$2 \times u \times u'$	Domaine de dérivabilité de u
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$	Domaine de dérivabilité de u et v avec domaine où v non nul
e^{ax+b}	$a \times e^{ax+b}$	$\mathbb{R}$

Exercices

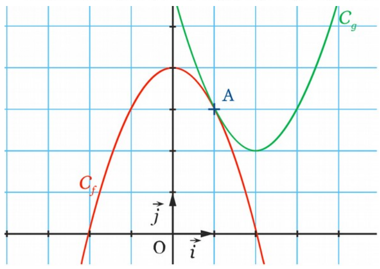
Exercice 1.



On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [−6;1]. Soit C_f sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$). On a également tracé trois tangentes d_1 , d_2 et d_3 à C_f respectivement en $A\left(-\frac{5}{2};-\frac{25}{8}\right)$, en B(-4 ;-2) et en O. On admet que d_1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les nombres dérivés de f en $x_1=-4$, en $x_2=-\frac{5}{2}$ et en $x_3=0$.
2. Lire graphiquement les équations des tangentes d_1 et d_3

Exercice 2

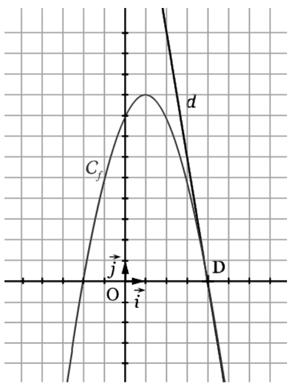


On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=-x^2+4$ et $g(x)=x^2-4x+6$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note leur courbe représentative C_f et Cg . On appelle A le point de coordonnées (1;3). (Courbes ci-contre).

1. Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune T en A.

2. Donner l'équation réduite de la tangente T et la tracer sur le graphe ci-contre.

Exercice 3



On considère la courbe représentative C_f de la fonction f définie par $f(x)=-x^2+2x+8$ et dérivable sur R. Soient D le point de C_f d'abscisse 4 et d la tangente en D à la courbe C_f . (Courbe ci-contre).

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente d.
2. Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à sa tangente d.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y=-x+1$.

1. Démontrer que la courbe représentative de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite *d* en des points que l'on déterminera.
2. Établir les équations de ces deux tangentes.

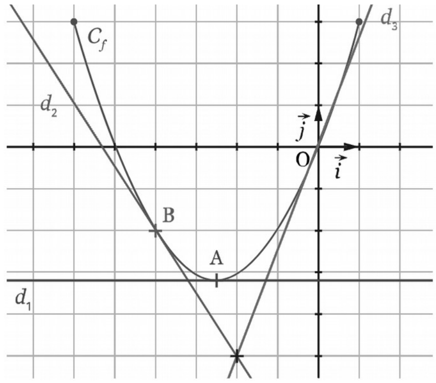
Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ sur l'ensemble I de $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=x^3+4x^2+5x-6$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}$ sur I= $]0;+\infty[$
3. $f(x)=e^x(x^2-x+1)$ sur $\mathbb{R}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x}(x^2-1)$ sur $\mathbb{R}^*$
5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

CORRIGÉS

Exercice 1



Par définition, le nombre dérivé de f en –4 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse –4, c'est-à-dire celui de d_2 qui passe par les points de coordonnées $(-4;-2)$ et $(-2;-5)$. On a donc : $f'(-4)=\frac{-5-(-2)}{-2-(-4)}=-\frac{3}{2}$.

De même, pour le nombre dérivé de f en $-\frac{5}{2}$. On lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $-\frac{5}{2}$, c'est-à-dire celui de d_1. Et comme d_1 est parallèle à l'axe des abscisses alors $f'\left(-\frac{5}{2}\right)=0$.

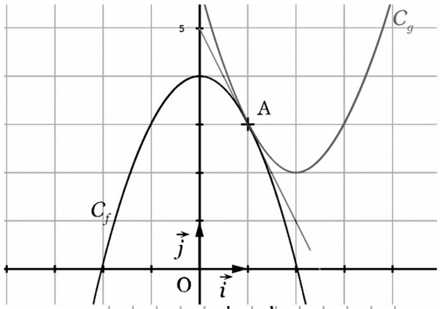
Enfin, on procède de même pour le nombre dérivé de f en 0 : on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, c'est-à-dire celui de d_3 qui passe par $O(0;0)$ et par le point de coordonnées $(-2;-5)$. On a donc : $f'(0)=\frac{0-(-5)}{0-(-2)}=\frac{5}{2}$.

d_1 a pour équation : $y=-\frac{25}{8}$ (-25/ 8 étant l'ordonnée de A)

d_3 a pour équation : $y=\frac{5}{2}x$

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=-x^2+4$ et $g(x)=x^2-4x+6$ et dérivables sur ℝ. On note leur courbe représentative C_f et C_g. On appelle A le point de coordonnées (1;3). (Courbes ci-contre).



1. Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune T en A.

On a $f(1)=-1^2+4=3$ et $g(1)=1^2-4\times1+6=3$ Donc A(1;3) est commun aux deux courbes.

$f'(x)=-2x$ et $f'(1)=-2\times1=-2$

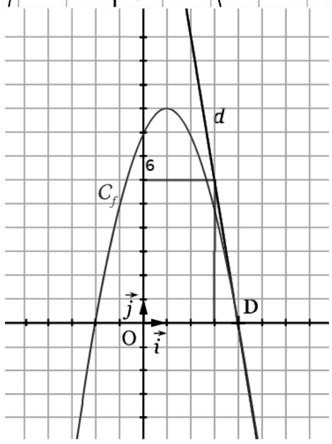
$g'(x)=2x-4$ et $g'(1)=2\times1-4=-2$

En A, les tangentes respectives à la courbe de f et de g ont le même coefficient directeur -2, elles sont donc confondues.

Son équation réduite est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f'(1)=-2$ et f(1)=3 donc $y=2(x-1)+3$ soit $\boxed{y=-2x+5}$

Exercice 3

On considère la courbe représentative C_f de la fonction f définie par $f(x)=-x^2+2x+8$



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente d

On peut lire graphiquement que le coefficient directeur de la tangente d en 4 est $-6=f'(4)$.

Comme une équation de la tangente est $y=f'(4)(x-4)+f(4)$ avec $f(4)=0$ La tangente d a pour équation $y=-6(x-4)+0$ soit $\boxed{y=-6x+24}$

2.Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à sa tangente d.

Méthode : on étudie le signe de $A(x)=-x^2+2x+8-(-6x+24)=-x^2+8x-16$ expression du second degré

On calcule $\Delta=8^2-4\times(-1)\times(-16)=64-64=0$ a une racine : $-\frac{b}{2a}=\frac{-8}{2\times(-1)}=4$ on a donc le signe de $A(x)=-(x-4)^2$

x	$-\infty$	***4***	$+\infty$
A(x)	***-***	***0***	***-***
Position de la courbe relativement à d	***Courbe en dessous de d***	***Contact***	***Courbe en dessous de d***

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x$ et dérivable sur ℝ et la droite d d'équation $y=-x+1$.

Démontrer que la courbe représentative de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite *d* en des points que l'on déterminera.

On a $f'(x)=3x^2-4$ S'il existe des valeurs x_0 telles que la tangente en x_0 est parallèle à la droite d d'équation $y=-x+1$, alors $3x_0{}^2-4=-1 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=-1$ ou $x_0=1$ Il y a donc deux tangentes, en -1 et 1 parallèles à la droite d d'équation $y=-x+1$

Pour $x_0=-1$, $f(-1)=(-1)^3-4\times(-1)=-1+4=3$, la tangente au point A(-1;3) a pour équation $y=-1(x+1)+3 \Leftrightarrow y=-x+2$

Pour $x_0=1$, $f(1)=1^3-4\times1=-3$, la tangente au point $B(1;-3)$ a pour équation $y=-1(x-1)+(-3) \Leftrightarrow y=-x-2$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ sur l'ensemble I de $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=x^3+4x^2+5x-6$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=3x^2+8x+5$

2. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}$ sur I= $]0;+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x^2}$

3. $f(x)=e^x(x^2-x+1)$ sur $\mathbb{R}$ on utilise la formule de dérivation d'un produit : $(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$

   $f'(x)=e^x(x^2-x+1)+e^x(2x-1)=e^x(x^2-x+1+2x-1)=e^x(x^2+x)$

   On n'oublie pas de mettre en facteur l'exponentielle

4. $f(x)=\dfrac{1}{x}(x^2-1)$ sur $\mathbb{R}^*$

   Dans ce cas, est conseillé de développer $f(x)$ avant de dériver. :

   $f(x)=\dfrac{1}{x}\times x^2-\dfrac{1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$ On dérive alors : $f'(x)=1-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=1+\dfrac{1}{x^2}$

5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$. On va appliquer la formule de la dérivée d'un quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$

   $$f'(x)=\frac{1\times(x^2+x+1)-(2x+1)\times(x-1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2+x+1-2x^2+2x-x+1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

1) Probabilté sachant A

Définition : A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$

La probabilité sachant A de l'événement B , notée $P_A(B)$ est $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

conséquence : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

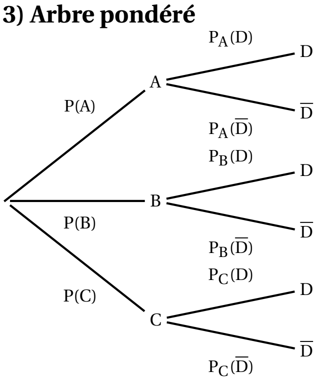
2) Indépendance

Définition : Dire que A et B sont deux événements indépendants signifie que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

conséquence : $P_A(B) = P(A)$ (lorsque $P(A) \neq 0$)

3) Arbre pondéré



★ $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$

$P(A \cap \overline{D}) = P(A) \times P_A(\overline{D})$

★ $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D)$

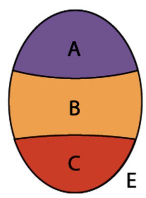
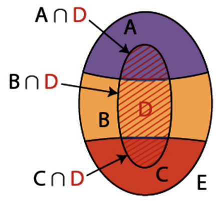
$P(B \cap \overline{D}) = P(B) \times P_B(\overline{D})$

★ $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D)$

$P(C \cap \overline{D}) = P(C) \times P_C(\overline{D})$

4) Partition de l'univers E

A, B et C représentent une partition de E

Cela signifie que : $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ et $A \cup B \cup C = E$.	Cette partition induit une partition des événements D et $\overline{D}$ du 2e niveau de branches.
	

5) Formule des probabilités totales

(On réunit les trois chemins ★ qui réalisent D)

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

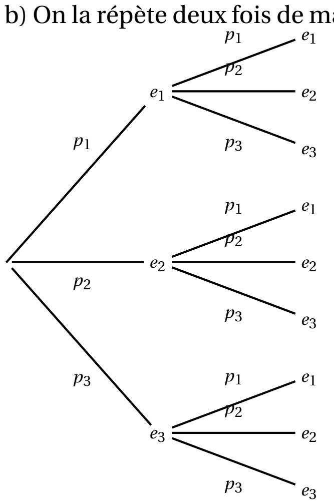
$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$

6) Répétition de manière indépendante

a) On considère l'expérience aléatoire de loi

issues	e_1	e_2	e_3
probabilité	p_1	p_2	p_3

b) On la répète deux fois de manière **indépendante**.



c) Par indépendance $\boxed{P(e_i ; e_j) = p_i \times p_j}$

Exemples :

Si l'on tient comple de l'ordre : $P(e_3, e_1) = p_3 \times p_1 = p_1 p_3$

Sans tenir compte de l'ordre : $P(\{e_1, e_3\}) = p_3 \times p_1 + p_1 \times p_3 = 2p_1 p_3$

VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

Définition :
Après avoir réalisé une expérience aléatoire d'univers $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, il arrive souvent qu'on associe à chaque issue e_i une valeur réelle x_i.

On dit qu'on a construit une **Variable aléatoire X** sur l'expérience.

La loi de probabilité de X est

valeurs	x_1	x_2	x_3
probabilité	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$

Espérance de X : $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$

Variance de X : $V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + p_3\left(x_3 - E(X)\right)^2$

Ecart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : On choisit un mois au hasard en 2021 (loi d'équiprobabilté).
Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de jours du mois.

La loi de probabilité de X est

valeurs	28	30	31
probabilité	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{4}{12}$	$\dfrac{7}{12}$

$E(X) \simeq 30,42$ jours en moyenne par mois de l'année.
$V(X) \simeq 0,743$ et $\sigma(X) \simeq 0,862$ donc l'écart moyen des mois par rapport à la moyenne est de 0,86 jours.

1ère	PROBABILITES CONDITIONNELLES ET VARIABLES ALEATOIRES : EXERCICES TYPES	

Exercice 1 : ***Tirage sans remise et probabilités conditionnelles***

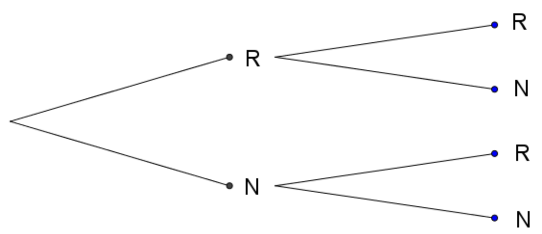
Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires.
On tire au hasard et successivement deux boules dans cette urne sans remise, c'est-à-dire sans que la boule tirée ne soit remise dans l'urne.
On considère les évènements suivants :
$\boldsymbol{B_1}$: « La boule tirée au premier tirage est blanche »
$\boldsymbol{N_1}$: « La boule tirée au premier tirage est noire »
$\boldsymbol{B_2}$: « La boule tirée au deuxième tirage est blanche »
$\boldsymbol{N_2}$: « La boule tirée au deuxième tirage est noire »

1) Décrire cette situation à l'aide d'un arbre probabiliste
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?
3) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.
4) Déterminer P(B_2)
5) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier ou au deuxième tirage.

Exercice 2 : ***Un jeu équitable ?***

Jack propose à Lewis le jeu suivant : un sac contient 3 boules noires et une boule rouge. Lewis tire au hasard et successivement deux boules dans ce sac avec remise, c'est-à-dire il tire une boule, note sa couleur, la remet dans le sac puis tire de nouveau une boule. Si les deux boules tirées sont noires, Jack verse 1€ à Lewis. Si les deux boules tirées sont rouges, Jack verse 10€ à Lewis. Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, Lewis verse 3,50€ à Jack.
On note G la variable aléatoire discrète qui, à chaque tirage, associe le gain de Lewis.

1) Compléter l'arbre de probabilités.



2) Déterminer la loi de probabilités de G, que l'on donnera sous forme de tableau.
3) Calculer l'espérance mathématique de G.
4) Le jeu est-il équitable ? Justifier. Lewis doit-il jouer ?

Exercice 3 : ***D'après Bac S : Asie juin 2007***

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :
• 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
• parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
• 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

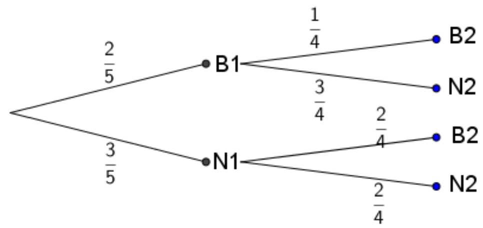
On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :
• F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
• S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1) Montrer que 93.4 % des jouets ont réussi le test de solidité
2) Un jouet a réussi le test de solidité, calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.
3) Étude d'une variable aléatoire *X*. Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10€, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5€. On désigne par *X* la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire *X*.

1ère	PROBABILITES CONDITIONNELLES ET VARIABLES ALEATOIRES : UNE CORRECTION	

<u>Exercice 1 :</u> ***Tirage sans remise et probabilités conditionnelles***

1)



2) $P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{2}$ (voir sur l'arbre)

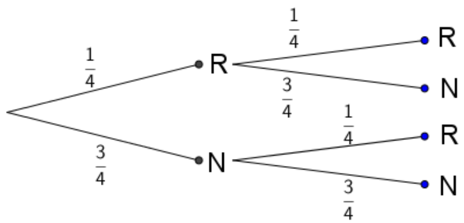
3) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = 0.4 \times 0.25 = 0.1$

4) $P(B_2) = P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) = 0.3 + 0.1 = 0.4$

5) $P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0.4 + 0.4 - 0.1 = 0.7$

<u>Exercice 2 :</u> ***Un jeu équitable ?***

1)



2) $P(G = 1) = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{9}{16}\right)$

$P(G = 10) = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{16}\right)$

$P(G = -3.5) = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{6}{16}\right)$

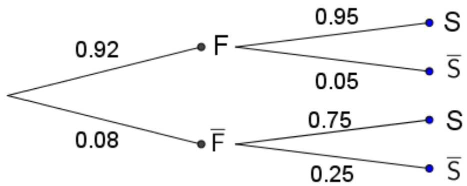
On conclut avec la loi de probabilités de *G :*

k	1	10	−3,5
$P(G = k)$	$\left(\frac{9}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{6}{16}\right)$

3) $E(G) = 1 \times \left(\frac{9}{16}\right) + 10 \times \left(\frac{1}{16}\right) - 3.5 \times \left(\frac{6}{16}\right) = -0.125$

4) $E(G) \neq 0$ donc le jeu n'est pas équitable. Lewis ne doit pas jouer car en moyenne il va perdre 0.125 €.

<u>Exercice 3 :</u> ***D'après Bac S : Asie juin 2007***



Données de l'exercice :

$P(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0.02\ donc$ on peut en déduire

$\boldsymbol{P_{\bar{F}}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{\boldsymbol{P}(\bar{F})} = \frac{0.02}{0.08} =$

1) $P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S) =$
$0.92 \times 0.95 + 0.08 \times 0.75 = 0.934$

2) $\boldsymbol{P_S(F)} = \frac{\boldsymbol{P(F \cap S)}}{\boldsymbol{P(S)}} = \frac{0.874}{0.934} = 0.936$

3) *a.* $P(X=0) = P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0.066$
$P(X=5) = P(\bar{F} \cap S) = 0.06$
$P(X=10) = P(F \cap S) = 0.874$

On conclut avec la loi de probabilités de *X :*

k	0	+5	+10
$P(X = k)$	0.066	0.06	0.874

b. $E(X) = 0 \times 0.066 + 5 \times 0.06 + 10 \times 0.874 = 9.04$ euros

Thème 5 : Applications à la dérivation

Théorème : f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

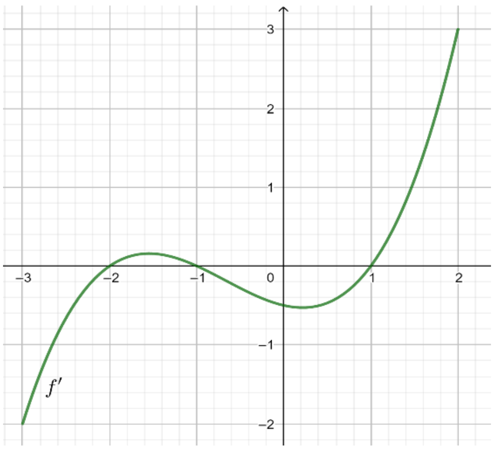
- Si $f\,'$ est positive sur I (sauf éventuellement en des points isolés où elle s'annule), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f\,'$ est négative sur I (sauf éventuellement en des points isolés où elle s'annule), alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f\,'(x) = 0$ pour tout réel $x \in I$, alors f est constante sur I.

A retenir : Connaître le signe de la dérivée *f'* permet de déduire les variations de *f*.

Remarque : Réciproquement, la connaissance des variations de f permet aussi de trouver le signe de f'.

Exemple : La courbe ci-contre représente la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur [-3 ; 2].

Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle [-3 ; 2] ?



Solution :

On peut lire graphiquement le signe de la fonction f'.

On obtient ainsi le tableau conjoint du signe de f' et des variations de f.

x	-3		-2		-1		1		2
Signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
Sens de variation de f		↘		↗		↘		↗	

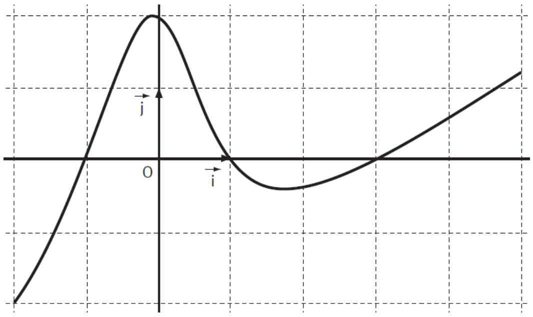
N.B. : Sans la courbe de f ou l'expression de $f(x)$, il n'est pas possible d'indiquer les images par f dans la dernière ligne du tableau.

Fiche d'exercices : thème 5, applications à la dérivation

Exercice n°1 :

Dans le repère ci-contre, la courbe (C) ci-contre est celle de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-2 ; 5].

Etudiez les variations de f sur l'intervalle [-2 ; 5].



Exercice n°2 :

La capacité de production d'une entreprise est de x centaines d'objets de luxe, $0 \leq x \leq 350$.
Le bénéfice pour x centaines d'objets produits est donné, en euros, par la fonction B telle que :

$$B(x) = -0{,}1x^3 + 28{,}125x^2 + 750x - 30\,000.$$

1) Calculez $B'(x)$ pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 350$.
2) a) Dressez le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 350]$.
   b) Quelle quantité d'objets produits permet d'obtenir un bénéfice maximal ? Que vaut ce bénéfice maximal ?

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$.

1) Calculez $f'(x)$ pour tout réel x puis factorisez son expression.
2) Dressez le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. Détaillez la démarche.
3) Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $[0 ; 2]$.

Exercice n°4 :

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (3x - 2)e^x$.

Le but de l'exercice est de déterminer si g admet un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}$.

1) Utilisez le menu graph de la calculatrice pour émettre une conjecture.
2) Démontrez votre conjecture.

Corrigé des exercices : thème 5, applications à la dérivation

Corrigé n°1 :

Dans cet exercice, **on a la courbe (*C*) de *f* ' sur l'intervalle [-2 ; 5].**
On lit donc graphiquement le signe de *f* ' et on en **déduira le sens de variation de *f***.

* La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en -1 ; 1 et 3 donc *f'* s'annule en $x = -1$, $x = 1$ et $x = 3$.
* La courbe (C) est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle [-1 ;1] et sur l'intervalle [3 ;5].
Par conséquent, *f'* est positive sur ces deux intervalles. *f'* est négative sur [-2 ;-1] et [1 ; 3].

On en déduit le tableau suivant :

x	-2		-1		1		3		5
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	0	+	
Sens de variation de f		↘		↗		↘		↗	

Corrigé n°2 :

1) $B'(x) = -0,1\times 3x^2 + 28,125\times 2x + 750\times 1$ donc $\boxed{B'(x) = -0,3x^2 + 56,25x + 750}$

2)* $\boxed{\text{Etude du signe de } B'(x) :}$ B' est une fonction polynôme du 2nd degré.

$\Delta = b^2 - 4ac = 56,25^2 - 4\times(-0,3)\times 750 = 4064,0625 > 0$

L'équation $B'(x) = 0$ admet deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-56,25-63,75}{2\times(-0,3)} = \dfrac{-120}{-0,6} = 200$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-56,25+63,75}{2\times(-0,3)} = -12,5 < 0$ $\left(x_2 \notin [0;350]\right)$

$B'(x)$ est du signe de $a = -0,3$ "à l'extérieur des racines" donc $B'(x)$ est négatif sur $[200;350]$.
$B'(x)$ est positif "à l'intérieur des racines" donc sur $[0;200]$.

On en déduit que $\boxed{B \text{ est strictement croissante sur } [0;200] \text{ et strictement décroissante sur } [200;350]}$.

b) Tableau de variation de B :

x	0		200		350	On obtient à l'aide de la calculatrice :
Signe de $B'(x)$		+	0	–		$B(0)$ = - 30 000.
Sens de variation de B	-30 000	↗	445 000	↘	-609 687,5	$B(200)$ = 445 000. $B(350)$ = - 609 687,5

c) Le bénéfice est maximal pour $\boxed{x = 200 \text{ centaines d'objets}}$ (20 000 objets).

Ce bénéfice maximal est égal à $\boxed{B(200) = 445\ 000 \text{ euros}}$.

Corrigé n°3 : 1) $f'(x) = 4x^3 - 8\times 2x + 0 = 4x^3 - 16x = \boxed{4x(x^2-4)}$ en factorisant

2) <u>On étudie le signe de *f* '(*x*) :</u> $4x = 0$ équivaut à $x = 0$. $x^2 - 4 = 0$ équivaut à $x^2 = 4$ soit $x = -2$ ou $x = 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		-		-	0	+		+	
$x^2 - 4$		+	0	-		-	0	+	
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
Sens de variation de f		↘	-14	↗	2	↘	-14	↗	

$x \mapsto 4x$ s'annule en 0 et est croissante (4 > 0)

$x \mapsto x^2 - 4$ a une parabole orientée vers le haut

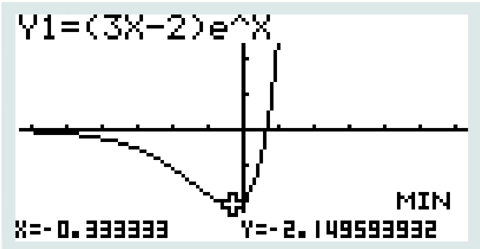
On complète cette ligne grâce à la règle des signes pour la multiplication.

On calcule f (-2), f (0) et f (2) pour compléter cette ligne

3) Sur [0 ;2], le minimum de f est -14 et le maximum est 2 donc pour tout réel x de $[0;2]$, $-14 \leq f(x) \leq 2$.

Corrigé n°4 :

1) Conjecture : Il semble que g admet un minimum sur $\mathbb{R}$, mais pas de maximum.



2) Démonstration : étude des variations de g.
$g = u \times v$ donc $g' = u'v + v'u$.
Pour tout réel x par $g'(x) = 3e^x + (3x-2)e^x = (3+3x-2)e^x = (3x+1)e^x$.
Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $(3x+1)$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ et $x \mapsto 3x+1$ est une fonction affine croissante (a = 3 > 0).
Ainsi, on obtient le tableau conjoint du signe de g'(x) et des variations de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de f		$\searrow$	m	$\nearrow$	

g admet donc un minimum m sur $\mathbb{R}$ atteint pour $x = -\frac{1}{3}$.

De plus : $m = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \left[3\times\left(-\frac{1}{3}\right)-2\right]e^{-\frac{1}{3}} = -3e^{-\frac{1}{3}}$.

g n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

Thème n° 6 : Fonctions trigonométriques

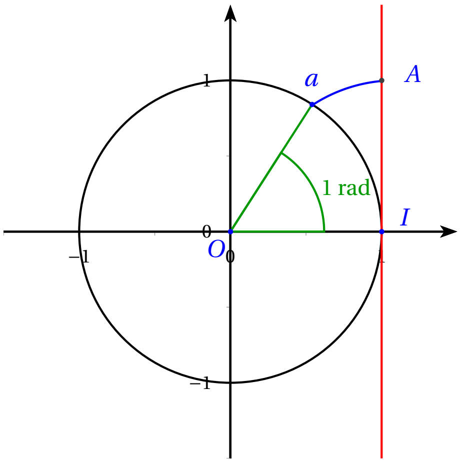
Cercle trigonométrique et mesure d'un angle en radian

Définition *Cercle trigonométrique*

Dans le plan muni d'un repère **orthonormé direct** $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ le cercle **trigonométrique** est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 muni du sens trigonométrique (ou direct) c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Définition *Le radian*

Par enroulement de l'axe des réels autour du cercle trigonométrique le point A définissant l'unité sur l'axe des réels vient en contact avec un point a du cercle trigonométrique.
La longueur de l'arc de cercle ainsi construit sur le cercle trigonométrique est de 1, c'est **1 radian** et son abréviation est rad
.



Propriété

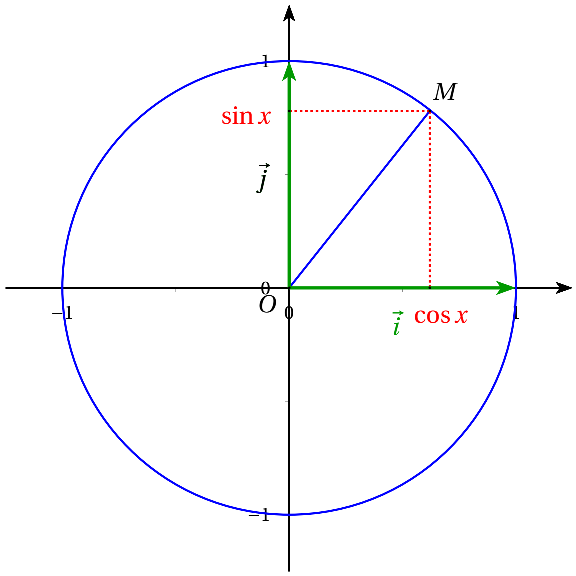
La mesure d'un angle en radians est **proportionnelle** à sa mesure en degrés

angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
réel x en rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π

Définition *Cosinus et sinus d'un nombre réel*

Soit x un nombre réel et M le point associé à x sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
On appelle **cosinus** de x, noté $\cos x$ et **sinus** de x, noté $\sin x$, les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$, on écrit :

$$M(\cos x\,;\,\sin x)$$



Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \sin(x+2k\pi) = \sin x \end{cases}$

angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
réel x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Fonction sinus et cosinus

Définition *Fonctions sinus et cosinus*

① La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel $x \longmapsto \sin(x)$ et qui a pour dérivée : $x \longmapsto \sin'(x) = \cos(x)$

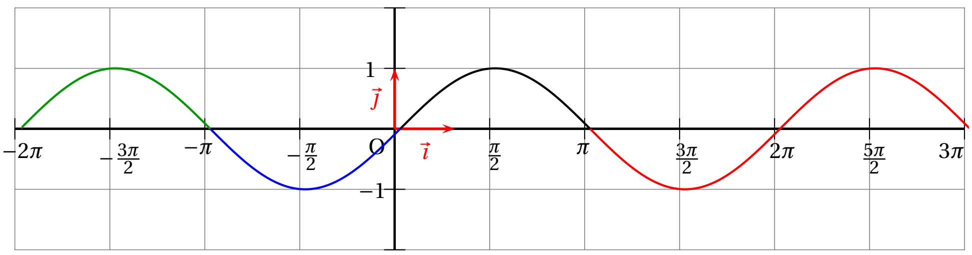
② La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel $x \longmapsto \cos(x)$ et qui a pour dérivée : $x \longmapsto \cos'(x) = -\sin(x)$

- Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π : $\begin{cases} \sin(x+2\pi) & = & \sin(x) \\ \cos(x+2\pi) & = & \cos(x) \end{cases}$
- La fonction sinus est **impaire** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(-x) = -\sin(x)$
- La fonction cosinus est **paire** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(-x) = \cos(x)$

Courbe représentative de la fonction sinus

Pour tracer la courbe de la fonction sinus, il suffit de faire une étude sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ puis de tenir compte des conséquences graphiques de la périodicité et de la parité de cette fonction.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

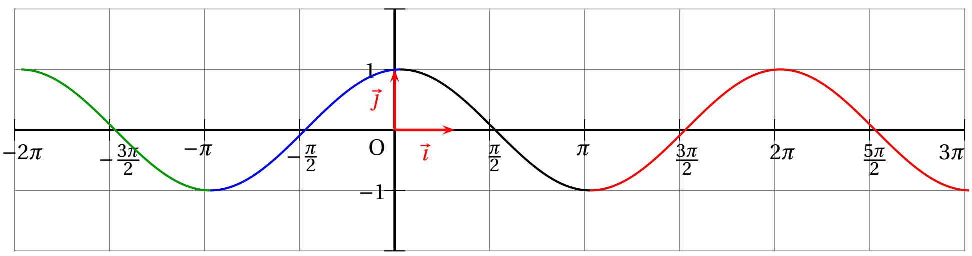


On a tracé la courbe sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ (en noir), puis on la complète par symétrie par rapport à O (en bleu), puis par translations (en rouge et en vert).

Courbe représentative de la fonction cosinus

En suivant la même démarche que pour la courbe de la fonction sinus, on obtient la courbe de la fonction cosinus

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$		$-$	
$\cos$	1	$\searrow$	-1



Exercices Thème 6 : Fonctions trigonométriques

Ex 6.1

1. Convertir 35 ° et 150 ° en radians
2. Convertir $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{3}$ en degrés

Ex 6.2

Donner les valeurs exactes des nombres suivants : $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

Ex 6.3

Déterminer dans chacun des cas suivants un nombre réel b de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$ permettant de placer le point associé au réel a :

1. $a = \frac{15\pi}{2}$
2. $a = -\frac{29\pi}{6}$

Ex 6.4

Résoudre les équations trigonométriques suivantes en vous aidant du cercle trigonométrique :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x \in [0\,;\,2\pi[$
2. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi\,;\,3\pi]$

Ex 6.5

Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes en vous aidant du cercle trigonométrique :

1. $\sin x < -\frac{1}{2}$ pour $x \in]-\pi\,;\,\pi]$
2. $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [0\,;\,2\pi[$

Ex 6.6

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 \sin x$
2. $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$

Correction du thème 6 : Fonctions trigonométriques

Correction 6.1

1. $35\,°$ donne : $\dfrac{35}{180}\pi = \dfrac{7\pi}{36}$ rad et $150\,°$ donne : $\dfrac{150}{180}\pi = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

2. $\dfrac{5\pi}{8}$ donne : $\dfrac{5}{8} \times 180 = 112,5\,°$ et
$\dfrac{7\pi}{3}$ donne : $\dfrac{7}{3} \times 180 = 420$ soit $60\,°$

Correction 6.2

1. $-\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{8\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = -2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$ donc : $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. $-\dfrac{7\pi}{3} = -\dfrac{6\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = -2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ donc : $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Correction 6.3

1. $a = \dfrac{15\pi}{2} = \dfrac{16\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 8\pi - \dfrac{\pi}{2}$ d'où : $b = -\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi\,;\,\pi\,]$

2. $a = -\dfrac{29\pi}{6} = -\dfrac{24\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6} = -4\pi - \dfrac{5\pi}{6}$ d'où : $b = -\dfrac{5\pi}{6} \in]-\pi\,;\,\pi\,]$

Correction 6.4

1. $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x & = & -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $\mathscr{S}_{[0\,;\,2\pi[} = \left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

2. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x & = & \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $\mathscr{S}_{[-\pi\,;\,3\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\dfrac{9\pi}{4}\,;\,\dfrac{11\pi}{4}\right\}$

Correction 6.5

1. $\sin x < -\dfrac{1}{2}$ donne : $\mathscr{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left]-\dfrac{5\pi}{6}\,;\,-\dfrac{\pi}{6}\right[$

2. $\cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donne : $\mathscr{S}_{[0\,;\,2\pi]} = \left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}\,;\,2\pi\right]$

Correction 6.6

1. $f = uv$ avec $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2 \\ v(x) & = & \sin x \end{array}\right.$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ d'où : $f' = u'v + uv'$ avec $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & \cos x \end{array}\right.$
donc : $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$

2. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \cos x \\ v(x) & = & 2 + \sin x > 0 \end{array}\right.$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ d'où : $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec
$\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & -\sin x \\ v'(x) & = & \cos x \end{array}\right.$ donc : $f'(x) = \dfrac{-\sin x(2+\sin x) - \cos x(\cos x)}{(2+\sin x)^2} = \dfrac{-2\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(2+\sin x)^2} = \dfrac{-2\sin x - 1}{(2+\sin x)^2}$

Thème n° 7 : FONCTION EXPONENTIELLE

1) Introduction :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note provisoirement exp.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $\exp 1 = e$

Nouvelle notation : Soit x un nombre réel. On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

On a ainsi $\boldsymbol{e^1 = e}$. Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e : $e \simeq 2,718$

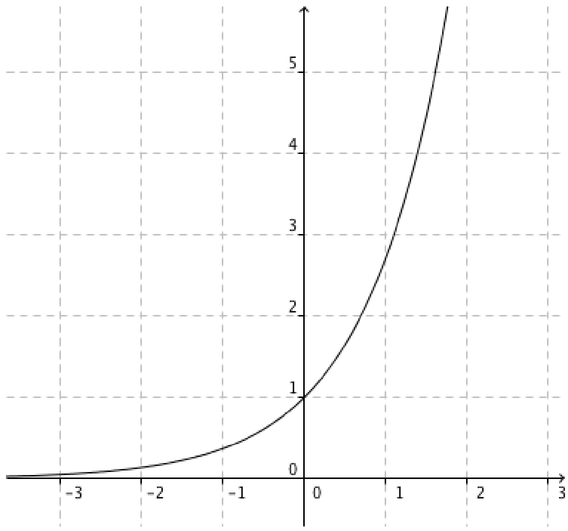
2) Étude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative et tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(e^x)' = e^x$	$+$
e^x	$\nearrow$



La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3) Propriétés de la fonction exponentielle :

$\boldsymbol{e^0 = 1}$; $\boldsymbol{e^1 = e}$; $\boldsymbol{e^x > 0}$; $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$

Pour tous réels x et y : $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

4) Résolution d'équations et inéquations. Pour tous réels a et b, on a :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

5) Fonctions de la forme $x \longmapsto e^{ax+b}$

La fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto ae^{ax+b}$.

Exemple : Soit $f(x) = e^{-5x}$ alors $f'(x) = -5e^{-5x}$.

Propriété : Si a > 0 : la fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$, est croissante.
Si $a < 0$: la fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$, est décroissante.

6) Fonctions de la forme $x \longmapsto e^{u(x)}$

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$

Exemple : Soit $f(x) = e^{x^2}$ alors $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

EXERCICES

Exercice 1 : Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5x - 2e^x$ b) $g(x) = (x-2)e^x$ c) $h(x) = \frac{e^x}{x}$ (x non nul)

Exercice 2 : Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \frac{e^8 \times e^{-4}}{e^{-6}}$; $B = (e^{-1})^6 \times e^6$; $C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

Exercice 3 : Soit x un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{e^{x-3}e^{-4x}}{e^{-3x+3}}$; $B = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$; $C = \frac{(e^{4x})^2}{e^{3x} \times e^{-3x}}$; $D = (e^x + e^{-x})^2$

Exercice 4 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

1) Calculer la dérivée de la fonction f.
2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2e^{3x} - x$.
Calculer $f'(x)$, en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-5)e^{-x}$

Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2e^{-0,5x} + x$

Calculer $f'(x)$, en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit la fonction f définie sur [– 1 ; 5] par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$

1) Montrer que $f'(x) = (2x-5)e^{-x}$.
2) Etudier les variations et dresser le tableau des variations de f sur [– 1 ; 5].
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -0,1$. Justifier.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 :

a) $f'(x) = 5 - 2e^x$ b) $g'(x) = 1 \times e^x + (x-2)e^x = e^x + xe^x - 2e^x = xe^x - e^x = (x-1)e^x$

c) $h'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

Exercice 2 :

$A = \frac{e^8 \times e^{-4}}{e^{-6}}$

$= \frac{e^{8-4}}{e^{-6}}$

$= \frac{e^4}{e^{-6}}$

$= e^{4-(-6)}$

$= e^{10}$

$B = (e^{-1})^6 \times e^6$

$= e^{-6} \times e^6$

$= e^{-6+6}$

$= e^0$

$= 1$

$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

$= \frac{1}{e^{-3\times 2}} + \frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}}$

$= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}}$

$= e^6 + 1$

Exercice 3 :

$$A = \frac{e^{x-3}e^{-4x}}{e^{-3x+3}} = \frac{e^{-3x-3}}{e^{-3x+3}} = e^{-3x-3+3x-3} = e^{-6}$$

$$B = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{2x\times 3}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$$

$$C = \frac{(e^{4x})^2}{e^{3x} \times e^{-3x}} = \frac{e^{8x}}{e^{3x-3x}} = e^{8x}$$

$$D = (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^{-x}e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$$

Exercice 4 :

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

Donc $x = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ ou $x = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$ Les solutions sont –3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

Exercice 5 :

a) $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

b)

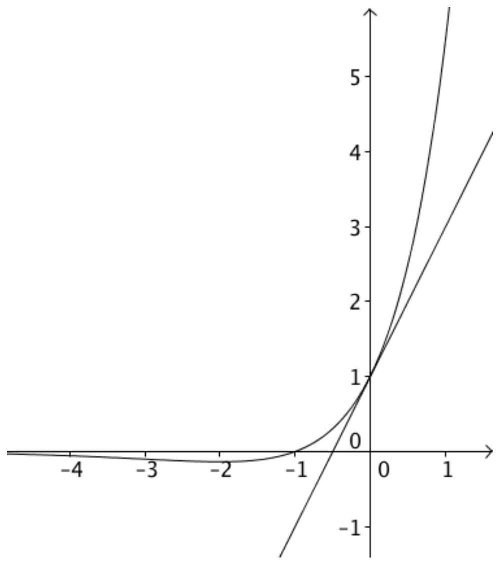
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit : $y = 2x + 1$

d)



Exercice 6. $f(x) = -2e^{3x} - x$.

$f'(x) = -2 \times 3e^{3x} - 1 = -6e^{3x} - 1$.

$f'(x) < 0$ car somme de deux nombres strictement négatifs donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-5)e^{-x}$

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x-5)(-e^{-x}) = 1 \times e^{-x} + (-x+5)e^{-x} = (-x+6)e^{-x}$

$e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x+6)$. f est décroissante sur $]-\infty; 6]$ et croissante sur $[6; +\infty[$

Exercice 8 : $f(x) = -2e^{-0,5x} + x$

$f'(x) = -2(-0,5e^{-0,5x}) + 1 = 2 \times 0,5e^{-0,5x} + 1 = e^{-0,5x} + 1$

$f'(x) > 0$ car somme de deux nombres strictement positifs. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 $f(x) = \dfrac{3-2x}{e^x}$

$f'(x) = \dfrac{-2e^x - (3-2x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(2x-5)}{e^{2x}} = e^{-x}(2x-5)$ La dérivée est du signe de $2x-5$ car $e^{-x} > 0$ donc

x	-1	α		$\frac{5}{2}$		β	5
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$	13,6	-0,1	$\searrow$	$-2e^{-2,5}$	$\nearrow$	-0,1	-0,05

L'équation $f(x) = -0,1$ admet donc deux solutions α et β.

Thème 8 : Produit scalaire, applications

I Produit scalaire

Cas des vecteurs colinéaires

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

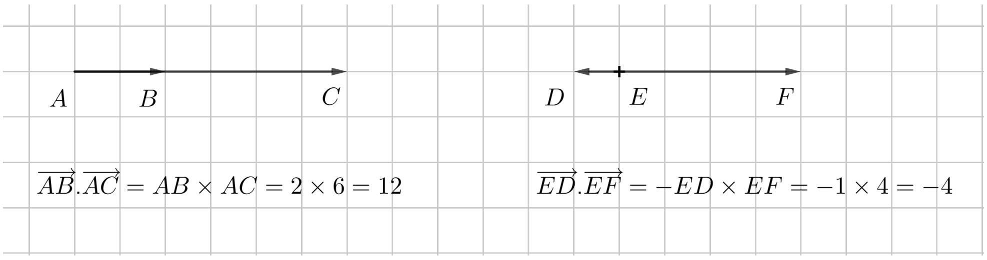
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$$

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$$

Exemples :

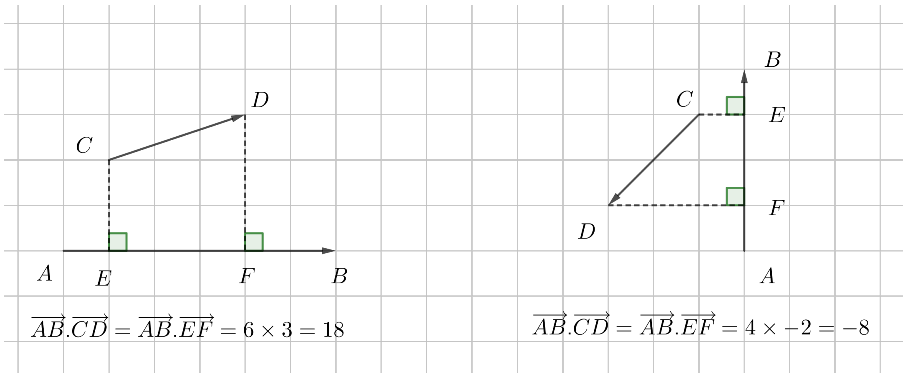


Formule du projeté orthogonal

Soient A, B, C et D quatre points (avec $A \neq B$), E et F les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}$$

Exemple :



Exercices 1: Calculer un produit scalaire avec les projetés orthogonaux

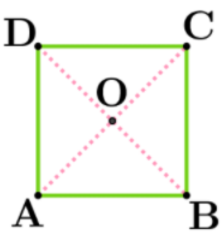
ABCD est un carré de centre O et côté 2.
Calculer les produits scalaires suivants:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$



Corrigé :

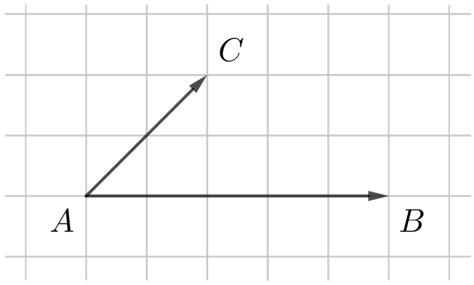
Formule du cosinus

Soient A, B et C trois points (avec $A \neq B$ et $A \neq C$), on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

Exemple :

On a donc $AB = 5$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ (ou 45°) et $AC = 2\sqrt{2}$*.
Ainsi,



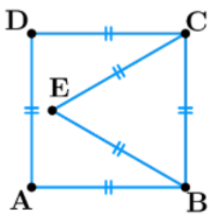
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}\\ &= 5 \times 2\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4}\\ &= 10 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 10\end{aligned}$$

* *On rappelle que la longueur de la diagonale d'un carré vaut $\sqrt{2}$ fois le côté ou vous pouvez retrouver ce résultat avec le théorème de Pythagore.*

Exercices 2: Calculer un produit scalaire avec la formule du cosinus

ABCD est un carré de côté 4.
Calculer les produits scalaires suivants:

- $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EC}$
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$



Corrigé :

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Remarque importante :

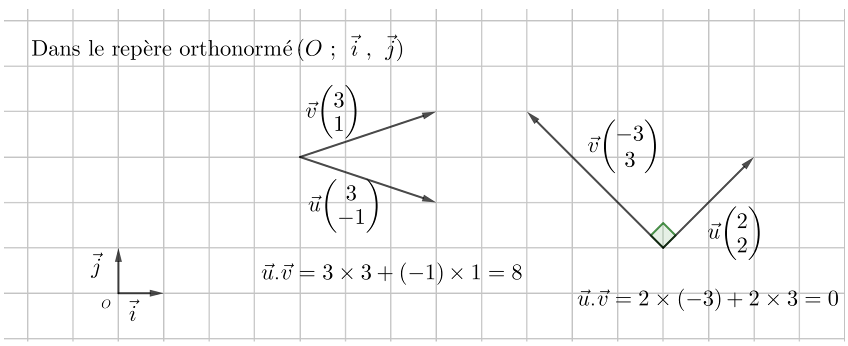
En exercice, pour montrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires, penser à montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Formule avec les coordonnées dans un répère orthonormé

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Exemples :



Exercice 3 :

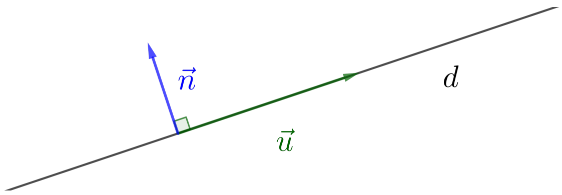
On donne les points $A(3\ ;\ 1)$, $B(6\ ;\ 3)$, $C(9\ ;\ -2)$ et $D(5\ ;\ 4)$ dans un répère orthonormé du plan.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

II Vecteur normal à une droite

Définition

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un *vecteur normal* à la droite d est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Exemple :



Théorème

Soit d une droite du plan et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.
La droite d admet pour vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si elle admet une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 :

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\ ;\ -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Corrigé :

— $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.
— d admet donc une équation cartésienne de la forme $-x + 3y + c = 0$ avec c un réel.
— Déterminons la valeur de c. $A(2\ ;\ -1) \in d$ donc $-2 + 3 \times (-1) + c = 0$ d'où $c = 5$.

d a pour équation $-x + 3y + 5 = 0$.

Exercice 5 :

Déterminer dans chaque cas si les droites d et d' sont perpendiculaires.

a) $d : 2x - 5y + 1 = 0$ et $d' : 8x + 3y = 0$ b) $d : -2x + 3y + 6 = 0$ et $d' : 9x + 6y - 8 = 0$

Corrigé :

a) d admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et d' admet pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n'}$ c'est à dire si et seulement si $\vec{n}.\vec{n'} = 0$.
Ici, $\vec{n}.\vec{n'} = 2 \times 8 + (-5) \times 3 = 1 \neq 0$. Donc d et d' ne sont pas perpendiculaires.

b) d admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et d' admet pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{n'} = -2 \times 9 + 3 \times 6 = 0$. Donc d et d' sont perpendiculaires.

Remarque : on aurait pu travailler avec les vecteurs directeurs des droites plutôt que les vecteurs normaux.

III Équations de cercle

Théorème

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(a\ ;\ b)$ et de rayon R.
Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Exercice 6 :

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-1\ ;\ 2)$ passant par $B(2\ ;\ 3)$.

Corrigé :

- Le rayon du cercle R est égal à AB. On a donc :

$$R^2=AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=3^2+1^2=10$$

- $\mathscr{C}$ a pour centre le point A. Il a donc pour équation :

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=R^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{(x+1)^2+(y-2)^2=10}$$

Exercice 7 :

Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle dont une équation est :

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0$$

Corrigé :

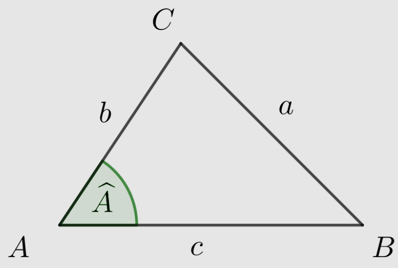
Soient x et y deux réels,

$$\begin{array}{ccc} & x^2+y^2-2x+4y+1 & =0 \\ \Leftrightarrow & x^2-2x+y^2+4y & =-1 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2-1+(y+2)^2-4 & =-1 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2+(y+2)^2 & =4 \end{array}$$

Le cercle a pour centre le point de coordonnées $(1\ ;\ -2)$ et pour rayon 2 (car $4=2^2$).

IV Théorème d'Al-Kashi

Théorème d'Al-Kashi



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$

3 exercices corrigés :